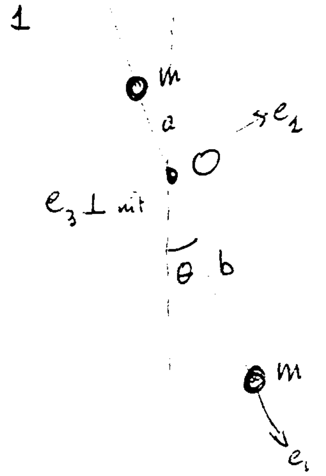
Uitwerking tentamen mechanica 17-3-2000.

1



Voor de traagheidstensor zijn de coördinaten van belang

$x_{11} = b \qquad x_{12} = 0 \qquad x_{13} = 0$

$x_{21} = -a \qquad x_{22} = 0 \qquad x_{23} = 0$

Invullen in de formule van I_{ij} levert:

$$I_{ij} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & mb^2+ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & mb^2+ma^2 \end{Bmatrix}$$

b $\quad L_i = \sum_j I_{ij}\,\omega_j$ levert, met het gegeven dat $\omega = \omega_3 = \dot{\theta} e_3$, φ

$$L_3 = (mb^2 + ma^2)\,\dot{\theta}\, e_3$$

c $\quad N = r \times F$ dit moet berekend worden van beide massa's

$$\Rightarrow N = b e_1 \times mg(\cos\theta\, e_1 - \sin\theta\, e_2) - a e_1 \times mg(\cos\theta\, e_1 - \sin\theta\, e_2)$$

$$\Rightarrow N = -bmg\sin\theta\, e_3 + amg\sin\theta\, e_3 = -(b-a)mg\sin\theta\, e_3$$

d $\quad N = \dot{L} \qquad \dot{L} = m(b^2+a^2)\,\ddot{\theta}\, e_3$

$$\Rightarrow -(b-a)mg\sin\theta\, e_3 = m(b^2+a^2)\,\ddot{\theta}\, e_3$$

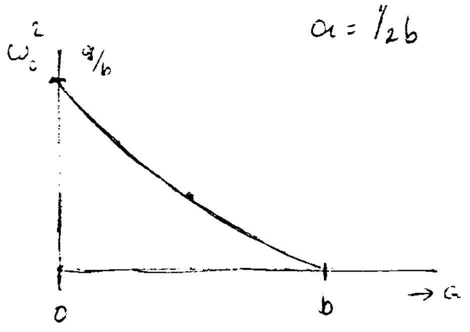
als θ klein $\Rightarrow \sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \omega_i^2 = \frac{(b-a)mg}{(b^2+a^2)\,m}$$

e $\quad$ Voor het geval $a = 0 \Rightarrow \omega_i^2 = \frac{bmg}{b^2 m} = \frac{g}{b}$

$a = b \Rightarrow \omega_i^2 = \frac{(b-b)mg}{(b^2+b^2)m} = 0$

$a = \frac{1}{2}b \Rightarrow \omega_i^2 = \frac{\frac{1}{2}bmg}{\frac{5}{4}b^2 m} = \frac{2}{5}\cdot\frac{g}{b}$



mechanica 17-3-2000

2 a De straal van de geostationaire baan kan berekend worden met de derde wet van Keppler $\tau^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{GMm} a^3$

$\mu \sim m_{sat}$ en voor cirkelbaan is $a = r_2$, $\tau = 1$ dag $= 24 \times 3600$ s

$\Rightarrow r_2 = \left(\frac{GM\tau^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$ $r_2 = \left(\frac{6{,}67\, 10^{-11} \cdot 5{,}98\, 10^{24} \cdot (24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$

$\Rightarrow r_2 = (7{,}5498\, 10^{22})^{1/3} = 4{,}22\, 10^7$ m

De totale energie in een baan is $E = T + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$

$\Rightarrow$ in de eerste baan is $E_{r_1} = -\frac{GMm}{2r_1}$ $r_1 = 6{,}37\, 10^6 + 0{,}2\, 10^6 = 6{,}57\, 10^6$

$\Rightarrow E_{r_1} = -3{,}04\, 10^{11}$ J.

$E_{r_2} = -4{,}73\, 10^{10}$ J

$\Rightarrow$ de energie nodig om de satelliet in baan r_2 te brengen is

$\Delta E = -4{,}73\, 10^{10} - (-30{,}4\, 10^{10}) = \underline{25{,}7\, 10^{10}\text{ J}}$

b Voor de cirkelbaan r_1 is de $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{GMm}{2r_1}$

$\Rightarrow v_{cirkelb} = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$

Voor een ellipsbaan is $E = \frac{-GMm}{2a}$ met $2a = r_1 + r_2$

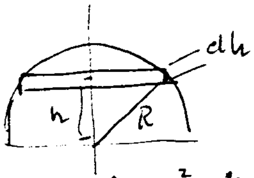
$\Rightarrow -\frac{GMm}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{GMm}{r_1}$ $\frac{1}{2} m v_e^2 = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)$

$\frac{1}{2} m v_e^2 = GMm\left(\frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}\right)$ $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r_1}\left(\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)}$

De stoot van de raket motor $F \cdot \Delta t$ moet zijn. $m\Delta V =$

$m(v_e - v_{cirkelb}) = m\left(\sqrt{\frac{2GM}{r_1}\frac{r_2}{(r_1 + r_2)}} - \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\right)$

Mechanica 17-3-2000

3 a I van halve bol is  als optelsom van cirkelschijven

een cirkelschijf heeft een $I_i = \frac{1}{2} m r_i^2$ $\qquad r^2 = R^2 - h^2 \qquad m = \pi r_i^2 \, dh \, \rho$

$$\Rightarrow I_{\text{halve bol}} = \int_0^R \frac{1}{2} \pi r_i^2 \, dh \, \rho \cdot r_i^2 = \frac{1}{2}\pi\rho \int_0^R r^4 \, dh = \frac{1}{2}\pi\rho \int (R^4 - 2R^2h^2 + h^4)\, dh$$

$$I_{\text{halve bol}} = \frac{1}{2}\pi\rho \left[R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5 \right] = \frac{1}{2}\pi\rho \left(\frac{8}{15} R^5 \right)$$

$$I_{\text{bol}} = \pi\rho \frac{4}{3} R^3 \cdot \frac{2}{5} R^2 = \underline{\frac{2}{5} m R^2}$$

b) de bal verplaatst langs de cilinderwand zich over $R\theta$ meter.

de deel van de bal dat langs de wand gerold is, is: $\rho(\theta + \phi)$

$$R\theta = \rho(\theta + \phi) \Rightarrow (R - \rho)\theta = \rho\phi$$

c $L = T - U = \frac{1}{2} m (R-\rho)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{5} \rho^2 \dot{\phi}^2 + (R-\rho)\cos\theta \, mg.$

m.b.v. b:

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m (R-\rho)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{5} m (R-\rho)^2 \dot{\theta}^2 + (R-\rho)\cos\theta \, mg$$

d) $\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \qquad -(R-\rho)\sin\theta \, mg - m(R-\rho)^2 \ddot{\theta} - \frac{2}{5} m (R-\rho)^2 \ddot{\theta} = 0$

$$\frac{7}{5} m (R-\rho)^2 \ddot{\theta} = -(R-\rho)\sin\theta \, mg$$

$$\Rightarrow \underline{\omega_c^2 = \frac{5}{7} \cdot \frac{g}{R-\rho}}$$

4 a) Het is mogelijk met een dergelijke kracht een maan rond een hemellichaam te laten draaien. De kracht is van het type zoals geldt voor veerkracht. De veerkracht kan ook de middelpuntzoekende F_{mpz} leveren

b Zo'n maan kan ook een ellipsbaan beschrijven. Het hemellichaam bevindt zich dan niet in een brandpunt maar in  het midden

c Als F de vorm heeft van mkr dan:

$m\frac{v^2}{r} = mkr \qquad v^2 = kr^2 \Rightarrow v = r\sqrt{k} \qquad v = \frac{2\pi r}{T} = r\sqrt{k}$

$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k}}$ is onafhankelijk van de baanstraal $\Rightarrow$ geen verschillende tijden

d $E = T + U = kr^2$ Bij terugkomst op aarde is $E \approx 0$ $\Rightarrow$ er moet veel arbeid door raketmotoren verricht worden om zacht te kunnen landen